D'où la proposition est vraie pour n=2.

⊞ $q \in IN^*\setminus\{1\}$. Supposons que $G_q(u)=-q!e^{-u}\sum_{p=2}^{q}\frac{u^p}{p!}+q!G_1(u)$

Montrons que $G_{q+1}(u)=-(q+1)!e^{-u}\sum_{p=2}^{q+1}\frac{u^p}{p!}+(q+1)!G_1(u)$

$G_{q+1}(u) = -u^{q+1}e^{-u} + (q+1)G_q(u)$. (d'après la **C-1)a-**)

$= -u^{q+1}e^{-u} + (q+1)\left[-q!e^{-u}\sum_{p=2}^{q}\frac{u^p}{p!} + q!G_1(u)\right]$

$= -(q+1)!\frac{u^{q+1}}{(q+1)!}e^{-u} - (q+1)!e^{-u}\sum_{p=2}^{q}\frac{u^p}{p!} + (q+1)!G_1(u)$

(car $(q+1)\times q! = (q+1)!$)

$= -(q+1)!e^{-u}\sum_{p=2}^{q+1}\frac{u^p}{p!} + (q+1)!G_1(u)$

Conclusion : ⊕ et ⊞ $\Rightarrow G_n(u) = -n!e^{-u}\sum_{p=2}^{n}\frac{u^p}{p!} + n!G_1(u)$

2) $\forall n \in IN^*\setminus\{1\}, G_n(u) = -n!e^{-u}\sum_{p=2}^{n}\frac{u^p}{p!} + n!G_1(u)$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*\setminus\{1\}, G_n(u) = -n!\sum_{p=2}^{n}\frac{u^pe^{-u}}{p!} + n!G_1(u)$

• $G_1(u) = \int_0^u te^{-t}dt = -ue^{-u} - e^{-u} + 1$ d'après **A-2/b-**

Ainsi $\forall n \in IN^*\setminus\{1\}, G_n(u)=-n!\sum_{p=2}^{n}\frac{u^pe^{-u}}{p!} + n![-ue^{-u}-e^{-u}+1]$

• pour $p \in IN^*\setminus\{1\}$; $\lim_{u\to+\infty} u^pe^{-u} = \lim_{u\to+\infty}\left[-p\frac{-u}{p}e^{\frac{-u}{p}}\right]$

$= \lim_{X\to-\infty}[pXe^X]^p = 0$ (avec $X=\frac{-u}{p}$)

$\lim_{u\to+\infty} G_n(u) = -n!\sum_{p=2}^{n}\frac{\lim_{u\to+\infty} u^pe^{-u}}{p!} + n!\lim_{u\to+\infty} -ue^{-u} - n!\lim_{u\to+\infty} e^{-u} + n! = n!$

3)a- $G_n(u) = \int_0^u t^ne^{-t}dt; \forall u \geq 0$

$\Rightarrow G_n$ est la primitive de $(t \mapsto t^ne^{-t})$ sur IR^+ qui s'annule en 0.

$\Rightarrow \forall u \geq 0; G_n'(u) = u^ne^{-u}$.

Ainsi : $\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$, on a :

$G_n'(nx) = (nx)^ne^{-nu} = n^nx^ne^{-nu} = n^nf_n(x)$

b- $\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$, on a :

$\forall t \in [0;x]; G_n'(nt) = n^nf_n(t)$

$\Rightarrow \int_0^x G_n'(nt)dt = n^n\int_0^x f_n(t)dt$

$\Leftrightarrow n^nF_n(x) = \frac{1}{n}\int_0^x (nt)'G_n'(nt)dt$

$\Leftrightarrow n^nF_n(x) = \frac{1}{n}[G_n(nt)]_0^x = \frac{1}{n}[G_n(nx) - G_n(0)]$

$\Leftrightarrow F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}}G_n(nx)$.

c- $\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^{n+1}}G_n(nx) = \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{n^{n+1}}G_n(u) = \frac{n!}{n^{n+1}}$.

(en posant u=nx on a : quand $x \to +\infty$ on a $u \to +\infty$)